

# Tartalom

Előszó . . . . .	i
<b>Tartalom . . . . .</b>	<b>iii</b>
<b>1. Összeszámlálási alapfeladatok . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1. Összeszámlálási alapfeladatok . . . . .	1
1.1.1. Faktoriális . . . . .	1
1.1.2. Ismétlés nélküli permutáció . . . . .	2
1.1.3. Ismétléses permutáció . . . . .	2
1.1.4. Ismétlés nélküli variáció . . . . .	3
1.1.5. Ismétléses variáció . . . . .	4
1.1.6. Binomiális együtthatók . . . . .	5
1.1.7. Ismétlés nélküli kombináció . . . . .	5
1.1.8. Ismétléses kombináció . . . . .	6
1.2. Binomiális tétel . . . . .	7
1.3. Permutációk . . . . .	7
1.4. Feladatok . . . . .	10
<b>2. Komplex számok . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1. Komplex számok . . . . .	13
2.2. Műveletek komplex számokkal . . . . .	14
2.2.1. Összeadás, kivonás . . . . .	14
2.2.2. Szorzás, osztás . . . . .	15
2.3. Komplex számok trigonometrikus alakja . . . . .	16
2.3.1. Komplex számsík . . . . .	16
2.3.2. Trigonometrikus alak . . . . .	17
2.4. Komplex számok n-edik gyöke . . . . .	19
2.5. A valós és a komplex számtest . . . . .	20
2.6. Az algebra alaptétele . . . . .	21
2.7. Feladatok . . . . .	21
<b>3. Vektorok 3D-ben . . . . .</b>	<b>25</b>
3.1. Az irányított szakaszok 3-dimenziós vektortere . . . . .	25
3.1.1. Vektorok összeadása . . . . .	27
3.1.2. Vektorok skalárral való szorzása . . . . .	29
3.2. Vektor koordinátái . . . . .	30
3.3. Skalárszorzat . . . . .	32

3.4.	Vektori szorzat, vegyes szorzat, azonosságok . . . . .	35
3.5.	A 3D-vektortér és a számhármassok terének izomorfája . . . . .	39
3.6.	Feladatok . . . . .	40
<b>4.</b>	<b>Determinánsok . . . . .</b>	<b>43</b>
4.1.	Négyzetes mátrixok és determinánsuk . . . . .	43
4.2.	A determináns elemi tulajdonságai . . . . .	47
4.3.	Kifejtés . . . . .	49
4.4.	A determinánsok szorzástétele . . . . .	52
4.5.	Alkalmazások . . . . .	53
4.5.1.	Az egyenes egyenlete . . . . .	53
4.5.2.	A paralelogramma és a háromszög területe . . . . .	54
4.5.3.	A paralelepipedon és a tetraéder térfogata . . . . .	55
4.5.4.	A kör egyenlete . . . . .	55
4.6.	Feladatok . . . . .	56
<b>5.</b>	<b>Mátrixok . . . . .</b>	<b>61</b>
5.1.	Mátrixok . . . . .	61
5.2.	Műveletek mátrixokkal . . . . .	63
5.2.1.	Összeadás, skalárral való szorzás . . . . .	63
5.2.2.	Szorzás . . . . .	63
5.2.3.	Transzponálás, konjugálás, adjungálás . . . . .	66
5.3.	Mátrix nyoma . . . . .	67
5.4.	Mátrixok inverze . . . . .	68
5.5.	Mátrix rangja . . . . .	71
5.6.	Alkalmazások . . . . .	71
5.6.1.	Erőkonstans mátrix . . . . .	71
5.6.2.	Séták gráfokban . . . . .	73
5.6.3.	Titkosítás mátrixokkal . . . . .	74
5.7.	Feladatok . . . . .	76
<b>6.</b>	<b>Vektorterek . . . . .</b>	<b>79</b>
6.1.	Vektortér . . . . .	79
6.2.	Altér . . . . .	84
6.3.	Generálás . . . . .	85
6.4.	Lineáris függetlenség . . . . .	87
6.5.	Vektorrendszerek elemi átalakításai . . . . .	89
6.6.	Bázis, dimenzió, koordináták . . . . .	91
6.6.1.	Bázis . . . . .	91
6.6.2.	Dimenzió . . . . .	92
6.6.3.	Koordináták . . . . .	93
6.7.	Alkalmazások . . . . .	94
6.7.1.	Vandermonde-mátrixok . . . . .	94
6.7.2.	Kristályok . . . . .	95

6.8. Feladatok . . . . .	96
<b>7. Lineáris egyenletrendszerek . . . . .</b>	<b>101</b>
7.1. Lineáris egyenletrendszerek . . . . .	101
7.2. Gauss-elimináció . . . . .	105
7.3. Cramer-szabály . . . . .	110
7.4. Homogén lineáris egyenletrendszerek . . . . .	111
7.5. Lineáris függetlenség $\mathbb{F}^m$ -ben . . . . .	111
7.6. Gauss–Jordan-elimináció . . . . .	113
7.7. Alkalmazások . . . . .	115
7.7.1. Dimenzióanalízis . . . . .	115
7.7.2. Legkisebb négyzetek módszere . . . . .	116
7.7.3. Wronski-determináns . . . . .	117
7.8. Feladatok . . . . .	118
<b>8. Lineáris leképezések, lineáris transzformációk . . . . .</b>	<b>121</b>
8.1. Lineáris leképezés . . . . .	121
8.2. Műveletek lineáris leképezésekkel . . . . .	124
8.2.1. Lineáris leképezések összege . . . . .	124
8.2.2. Lineáris leképezés skalárszorosa . . . . .	124
8.2.3. Lineáris leképezések szorzata . . . . .	125
8.3. Lineáris leképezések mátrixa, összegük és szorzatuk mátrixa . . . . .	126
8.4. Lineáris leképezések mátrixa különböző bázisokban . . . . .	128
8.5. Hasonló mátrixok . . . . .	128
8.6. Alkalmazások . . . . .	130
8.6.1. Diagonálisan domináns mátrixok . . . . .	130
8.6.2. Elemi vetítő transzformációk . . . . .	131
8.6.3. Elemi tükröző transzformációk . . . . .	133
8.6.4. Forgatások $\mathbb{R}^3$ -ben . . . . .	134
8.7. Feladatok . . . . .	137
<b>9. Sajátérték, sajátvektor . . . . .</b>	<b>139</b>
9.1. Sajátérték, sajátvektor, sajátbázis . . . . .	139
9.2. Karakterisztikus polinom, minimálpolinom . . . . .	141
9.2.1. Karakterisztikus polinom . . . . .	141
9.2.2. Minimálpolinom . . . . .	144
9.3. Invariáns alterek . . . . .	147
9.4. Jordan-féle normálalak . . . . .	147
9.5. Alkalmazások . . . . .	149
9.5.1. Fibonacci-sorozat . . . . .	149
9.5.2. Sajátarcok . . . . .	150
9.6. Feladatok . . . . .	152

<b>10. Lineáris funkcionálok, duális tér</b>	<b>155</b>
10.1. Lineáris funkcionálok	155
10.2. Duális tér	157
10.3. Feladatok	158
<b>11. Bilineáris funkcionálok, ortogonalizálás</b>	<b>161</b>
11.1. Valós bilineáris funkcionálok	161
11.2. Ortogonalizálás	162
11.2.1. Gram–Schmidt ortogonalizációs eljárás	163
11.3. Kvadratikus alak	167
11.4. Komplex bilineáris funkcionálok	169
11.5. Alkalmazások	170
11.5.1. Tehetetlenségi nyomatók	170
11.6. Feladatok	171
<b>12. Euklidészi terek</b>	<b>173</b>
12.1. Valós euklidészi tér	173
12.2. Hossz, távolság, szög	174
12.3. Komplex euklidészi tér	176
12.4. Transzformáció adjungáltja	177
12.5. Normális, önadjungált és unitér transzformációk	178
12.6. Szimmetrikus és ortogonális transzformációk	179
12.6.1. Sajátbázis	179
12.6.2. Projekciók, spektráltétel	182
12.7. Feladatok	183
<b>F. Függelék</b>	<b>185</b>
F.1. A $\sum$ és $\prod$ jelek, összegzési konvenciók	185
F.2. Kronecker-delta	186
F.3. Levi-Civita-szimbólum	187
F.4. A determinánsok kifejtési tétele	187
<b>Név- és tárgymutató</b>	<b>191</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>195</b>