Pontatlanságok és néhány hiba a „Lineáris algebra fizikusoknak" jegyzetben

A 21. Definíció a 7. oldalon: nyilvánvaló módon pontatlan megfogalmazás.

A 12. (a) tulajdonságban (a 64. oldalon): Érdemes megjegyezni, hogy a bal oldal szorzatai akkor és csak akkor léteznek, ha a jobb oldal szorzatai léteznek.

A 36. Állítás (90-91. oldal) bizonyítása nem teljes: nincs bizonyítva (bár természetesen igaz), hogy n vektor lineáris kombinációból legfeljebb n lineárisan független vektor kapható. A körkörös érvelések veszélyét elkerülendő, az előadáson a dimenzió fogalmának egy másfajta felépítését követjük. A dimenzió fogalmának ezen felépítéséből (lásd a Freud könyvet vagy kiegészítő anyagot) a 36. Állítás egyszerűen adódik: ekvivalens vektorrendszerek rangja megegyezik, mivel az nem más, mint az általuk generált altér dimenzója, ami egyértelműen definiált.

67. oldal 4. sor: Ez nem hiba, de természetesen bármely (nem csak a valós) számtest esetén beszélhetünk szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrixról.

83. oldal, a 12. Következmény bármely lineáris leképezés (nem csak izomorfizmus) esetén igaz.

109. oldal 3. sor: A lépcsős alakban a vezéregyesek alatt nullák állnak.

109 oldal, a kiemelt szöveg: A leírt eljárás lépcsős alakra vezet, a redukált lépcsős alakban a vezéregyesek felett is nullák állnak (míg a lépcsős alakban csak alattuk állnak nullák). Az irodalomban többféle egyéb terminológia is előfordul, mi a Freud könyvben is használtat követjük.

109. oldal 8. és 9. sor: Az ott adott helyes állításhoz felesleges elhagyni a felesleges sorokat. Az állítás igazsága nem függ ettől.

109. oldal, alulról a 3. sor: az eljárás végén adódó lépcsős mátrix mérete lehet más mint az eredeti méret, mivel elhagyjuk a felesleges sorokat.

111. oldal, a kiemelt rész fölötti zárójeles mondat helyesen: … és nincs tilos sor, akkor végtelen sok megoldás van (hiszen ha nincs tilos sor, akkor mindig van megoldás).

113. oldal, 22. Tétel: A bizonyítás hiányos, mivel azt is meg kell mutatni, hogy Gauss-elimináció során egyik rang se változik. Ez persze igaz (lásd pl. a Freud könyvet).

117 oldal, a 7.7.3. pont feletti 2 mondat: A lineáris egyenletrendszernek általában nincs megoldása, és általában nem is azt a lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ha lenne megoldás, akkor az illesztett polinom pontosan átmenne a mérési pontokon… ellentétben a 3. Ábrával. Az m=n esetben ez így is van. A legkisebb négyzetek módszerének itt leírt végső megoldása helyes, de nem az itt leírt lineáris egyenletrendszerből adódik. Lásd a wikipédiát (angolul), vagy kiegészítő anyagot.

7.7.3. Wronski-determináns, 117. és 118. oldal: Csak azt bizonyítottuk, hogy a lineáris összefüggőségből következik a W(x) determináns azonosan nulla volta. Az általában, további feltételek nélkül, nem igaz, hogy W(x) azonosan nulla volta implikálja a lineáris összefüggőséget. Lásd pl. a wikipédiát, vagy kiegészítő anyagot.

142. oldal, 9. Definíció: Nincs itt hiba, de szerencsésebb bármely lineáris transzformáció és bármely négyzetes mátrix karakterisztikus polinomjáról beszélni, először említve a mátrixok esetét.

145. oldal: a Cayley-Hamilton tétel egy elemibb változata: Bármely négyzetes mátrix gyöke a saját karakterisztikus polinomjának.

21. Tétel – Jordan-féle normálalak (147-148 oldal): Az így kimondott állítás nem korrekt. A korrekt állításhoz lásd pl. a wikipédiát vagy kiegészítő anyagot.

162. oldal, 3. Definíció szövege utáni paragrafus: általában ez így nem korrekt, mivel az eredmény bázisfüggő, ellentétben a leírt állítással. Vagyis vektortér lineáris transzformációjához általában nem lehet bázisfüggetlen módon bilineáris funkcionált rendelni. (Ennek oka abban rejlik, hogy – mint az könnyen ellenőrizhető -- lineáris transzformáció és bilineáris funkcionál mátrixa általában más módon változik báziscsere hatására.)

163. oldal, 6. Állítás: Jegyezzük meg, hogy valós bilineáris funkcionál mátrixának szimmetrikus jellege bázisfüggetlen állítás.

163. oldal, 12. Definíció: hibás. A nemelfajuló jelleg igazából azt jelenti, hogy nincs olyan nem nulla vektor, ami minden vektorra merőleges.

163. oldal utolsó két sora és a 164. oldal: A procedúrához nem nemelfajultságot, hanem pozitív vagy negatív definitséget kell feltenni. (A definitség ekvivalens azzal amit itt hibásan nemelfajultságnak neveztek.)

166. oldal, 17. Tétel: Az állításhoz nemelfajultság feltételezése nem szükséges. Nem is célszerű azt feltenni, hiszen a feltevés pontosan ekvivalens azzal, hogy a diagonális mátrix főátlójában nincsenek nullák. A bizonyítás a korrekt állítást igazolja!

167. oldal, 22. (c) pont: A kiemelt formulában szereplő “daggert” (+) nem definiáltuk.

168. oldal, lábjegyzet: a főminorok itteni definíciója helytelen. Valójában a a 27. Tétel állításában szereplő főminorok a mátrix bal-felső sarkából induló négyzetes részmátrixainak determinánsai. Pl. az első főminor az első sor első eleme, az utolsó pedig maga a mátrix determinánsa. Megjegyzendő az is, hogy az irodalomban ezeket a főminorok általában vezető főminoroknak nevezik (lásd pl. Wettl Ferenc könyvét).

169. oldal 29. Példa utáni paragrafus: A kvadratikus alakok és a bilineáris funkcionálok közötti megfeleltetés a valós és a komplex esetekben különböző. A valós esetben a szimmetrikus bilineáris funkcionálok és a kvadratikus alakok között áll fenn bijekció, míg a komplex esetben bármely bilineáris funkcionált lehet venni (amely def. szerint konjugált lineáris az első változóban). A formulákban nincs itt hiba, de a szövegezés ("hasonlóan érvényesek…") félrevezető lehet.

170. oldal, 33. Állítás: Érdemes lehet hangsúlyozni, hogy az állítás bármely bázisban igaz.

170. oldal, 34. Állítás: Igaz, de a bizonyítás nem korrekt (hiszen a Gram-Schmidt eljárás általában nem áll rendelkezésre). Lásd pl. a Freud könyvet.

177. oldal, 19. Állítás: Az adjungált transzformáció mátrixára vonatkozó állítás csak ONB-ban igaz. Az adjungált transzformációnak az állítás bizonyításásában leírt konstrukciója is csak ONB-t használva helyes. Valójában szerencsésebb az adjungált fogalmát bázistól független módon értelmezni.

180. oldal első mondata: Érdemes hangsúlyozni, hogy amennyiben a mátrix szimmetrikus egy ONB-ben, akkor bármely ONB-ben is szimmetrikus.

34. Tétel bizonyításának vége, a 181. oldalon: az érvelés azt mutatja, hogy bármely sajátérték valós, és létezik hozzá valós sajátvektor, nem azt, hogy "a sajátvektor" valós.

188. oldal 2. sorában: a_{11} mátrixelem írandó, alulról az 5. sor végén: a_{1j} A_{1j} írandó.

Végül három triviális, terminológiai megjegyzés:

I. A 87. oldalon kiemelt szövegben (és máshol) a generátorrendszer jelölése nem túl szerencsés, mert a generátorrendszer nem feltétlenül halmaz, mivel tartalmazhat azonos vektorokat is.

II. 155. oldal, 1. Definíció és 170. oldal, 35. Definíció: Nem általánosan elterjedt a funkcionál szó használata ilyen általánosságban.

III. A komplex bilineáris funkcionálokról: Ügyeljünk arra, hogy az itt tárgyalt bilineáris funkcionálok az első változóban nem lineáris, hanem konjugált lineáris, funkcionálok. (Az irodalomban mindkét változóban lineáris komplex függvények is előfordulnak.)