A dimenzió fogalmának felépítése

1. Definíció. *A $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m \in V$ vektorokat a V vektortér (véges) generátorrendszerének nevezzük, ha V minden eleme előáll ezen vektorok lineáris kombinációjaként.*

2. Definíció. *Egy vektortér véges dimenziós, ha van véges sok elemből álló generátorrendszere.*

A továbbiakban véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk.

3. Definíció. *Az $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in V$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\vec{0}$-t csak a triviális lineáris kombinációjuk állítja elő.*

1. Propozíció. *Ha egy (legalább kételemű) lineárisan független rendszerből egy tetszőleges vektort elhagyunk, a maradék vektorok továbbra is lineárisan független rendszert alkotnak.*

2. Propozíció. *Ha az $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, de az $\vec{u}_{n+1}$ vektor hozzávételével kapott rendszer már összefüggő, akkor $\vec{u}_{n+1}$ előáll az $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

1. Lemma. *Bármely $V \neq \{\vec{0}\}$ vektortérben található lineárisan független generátorrendszer.*

A 1. Lemma alapján bevezethetjük a bázis fogalmát.

4. Definíció. *A lineárisan független generátorrendszert bázisnak nevezzük.*

Szeretnénk eljutni a dimenzó fogalmához, melynek definícióját megelőlegezzük.

5. Definíció. *Egy vektortér dimenziója a bázisának elemszáma.*

A definíciónak csak abban az esetben van értelme, ha adott vektortérben minden bázis elemszáma azonos. Ezt fogjuk belátni.

1. Tétel. *Egy vektortérben bármely két bázis elemszáma azonos.*

Ennél egy általánosabb, erősebb tételt látunk be, melynek speciális eseteként a 1. Tétel adódik.

2. Tétel. *Ha $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineárisan független rendszer, míg $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq m$.*

Bizonyítás.
A 2. Tétel bizonyításához fel fogjuk használni a következő lemmát.

> **2. Lemma** (Kicserélési lemma). *Legyen $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineárisan független, míg $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ generátorrendszer egy V vektortérben. Ekkor bármely $\vec{u}_i$-hez található olyan $\vec{v}_j$, melyet $\vec{u}_i$-vel kicserélve is lineárisan független rendszert kapunk, azaz*
>
> $$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{v}_j, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n$$
>
> *is lineárisan független rendszer.*
>
> **A kicserélési lemma bizonyítása.**
> Tegyük fel, hogy pl. az $\vec{u}_1$ vektort kicserélve bármelyik $\vec{v}_j$-re mindig lineárisan összefüggő rendszert kapunk. Ekkor $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineárisan független (1. Propozíció) és mindegyik $\vec{v}_j$ előáll az $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként (2. Propozíció). Utóbbi miatt $\vec{v}_j$-k minden lineáris kombinációja is felírható az $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ vektorok lineáris kombinációjával. Viszont a $\vec{v}_j$-k generátorrendszert alkotnak, ezért lineáris kombinációik előállítják a vizsgált vektortér minden vektorát, így $\vec{u}_1$-t is. Vagyis, a fentieket egybevetve arra jutottunk, hogy $\vec{u}_1$ kifejezhető $\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineáris kombinációjaként. Ez utóbbi viszont nyilván ellentmondás, mert $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ lineárisan független rendszer volt. Tehát bármely $\vec{u}_i$ kicserélhető alkalmas $\vec{v}_j$-vel. $\square$

Most már rátérhetünk a 2. Tétel bizonyítására. Cseréljük ki először $\vec{u}_1$-t megfelelő $\vec{v}_j$-re, majd az így kapott független rendszerben cseréljük ki $\vec{u}_2$-t alkalmas $\vec{v}_j$-re. Ezt folytassuk addig, amíg az $\vec{u}_i$-k el nem fogynak. Az így kapott rendszerben már csak a $\vec{v}_j$-k szerepelnek, ezek között pedig a függetlenség miatt nem lehet két egyenlő. Azaz, legalább annyi $\vec{v}_j$-nek kell lennie, mint $\vec{u}_i$-nek. $\square$

A 1. Tétel állítását ez alapján úgy kapjuk, hogy az egyik bázist a lineáris független rendszernek, a másik bázist a generátorrendszernek tekintjük, majd ezt fordítva is megtesszük.

Megjegyzés.
A Gyémánt-Görbe jegyzetben szereplő 36. Állítás, miszerint ekvivalens vektorrendszerek rangja megegyezik, egyszerűen adódik a dimenzió fogalmának fentebb vázolt felépítéséből. Valóban, ugyanis egy vektorrendszer rangja (33. Definíció) nem más, mint a vektorrendszer által generált altér (22. Definíció) dimenziója. Két vektorrendszer ekvivalens, ha ugyanazt az alteret generálják (24. Definíció). Tehát rangjuk megegyezik, hisz az azonos ezen altér dimenziójával.